проф., к.т.н. Ерохов И.В., г. Запорожье

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ И ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Понятие двойственности используется в целом ряде научных дисциплин, например, в проективной геометрии, теории множеств, теории категорий, теории электрических цепей и в других. Существует много определений двойственности, самые известные принадлежат Л. Понтрягину и А. Колмогорову. Но в любом определении (в явной или неявной форме) подразумевается наличие границы между тем, что есть вещь и тем, чем она не является. Например, исследователь изучает определенный объект Природы, который отражается в его сознании. С помощью некоторого математического аппарата умозрительная модель переносится на бумагу. Без сомнения, математическая модель не может охватить всех свойств реального объекта. Однако анализ его свойств исследователь проводит именно на полученной (двойственной) математической модели объекта. Двойственный объект имеет неоспоримое преимущество – он более доступен для анализа и, благодаря авторитету математики, никто не сомневается в его легитимности. Кроме того, в данном случае наличие границы между объектом и умозрительной моделью очевидно, а это главный признак двойственности.

Принцип двойственности расширяет ассортимент объектов, между которыми усматривается двойственная зависимость. Двойственность можно наблюдать не только как связь между реальным и идеальным объектами. Двойственная зависимость может быть установлена между двумя идеальными объектами и даже между физическими величинами. Отметим, что это отношение нельзя вывести аналитически из простых посылок, так как оно является фундаментальным понятием процесса описания природы [1].

Электрическая цепь представляет собой систему идеальных элементов, которые соединены между собой так, чтобы образовывались пути для тока. Как любая система, электрическая цепь обладает свойством «целостности», т.е. имеет четкие границы. Пространство, в котором существует цепь, разделяется границей на две части: внешнюю и внутреннюю. За границей располагается внешняя «среда», с которой электрическая схема взаимодействует, выполняя свою работу. Именно, наличие границы предоставляет исследователю возможность изучения любого элемента цепи (системы) или ее переменной в двух ракурсах: изнутри и снаружи. Наличие двух ракурсов как раз и порождает отношение двойственности.

Любой проводник, как и любой элемент электрической цепи, имеет очевидную границу, которая отделяет его внутреннюю среду от среды внешней. Конечно, перенос электрического заряда осуществляется через его «внутреннюю среду», механизм которого изучает физика. Сама же теория электрических цепей довольствуется простой гидравлической моделью явления. Действительно, мы всегда говорим, что электрический ток «течет» (как вода в трубе).

Впервые такая модель была введена российским академиком В.В. Петровым в его труде, изданном в 1803 году в Санкт-Петербурге – «Известие о гальвани-вольтовских опытах, которые проводил профессор физики Василий Петров» [2]. Академик, описывая передачу электрического заряда через тело проводника, применил термин, буквально позаимствованный из гидравлики – «движение гальвани-вольтовской жидкости». Таким образом, проводник был представлен «особой» трубой с особым содержимым, рис.1.

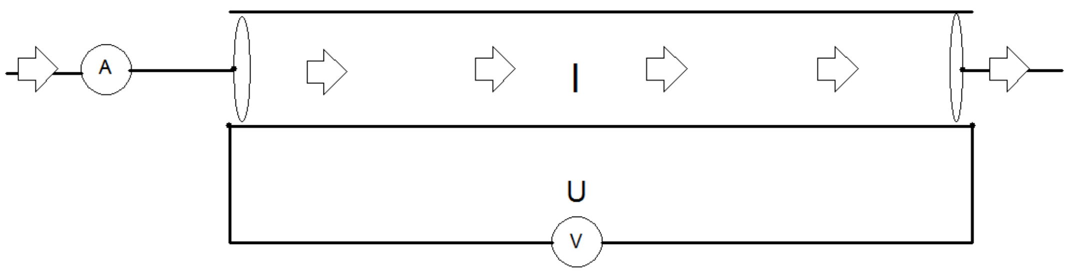

Рис. 1. Модель проводника в виде трубы.

Очевидно, что величина электрического тока характеризует процесс передачи электрического заряда во внутренней «среде» проводника. В то же время, при движении заряда на отрезке проводника (участке трубы) возникает напряжение (разность потенциалов), которая характеризует тот же процесс, но с позиций «внешнего» исследователя. Двойственность основных переменных, которые отражают один и тот же процесс переноса заряда через проводник, позволяет записать два уравнения:

$$\text{а)}\ U = R \cdot I \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{б)}\ I = G \cdot U \qquad (1)$$

Отношение двойственности выражений (1) проявляется в том, что после замены физических величин в уравнении закона Ома (1а) на двойственный набор переменных мы получаем уравнение (1б), имеющее тот же физический смысл. Заметим, что уравнению 1а соответствует **двухполюсник сопротивления**, а уравнению 1б – **двухполюсник проводимости**.

Кстати, гидравлическая модель проводника позволила В.В. Петрову, а затем и Г. Ому, установить связь между значением силы тока и величиной поперечного сечения проводника [2], [3]. Действительно, даже далекие от гидравлических расчетов люди согласятся с утверждением, что:

Чем больше сечение трубы, тем больше воды можно подать через нее.

Другими словами, величина поперечного сечения характеризует ее «водную проводимость». Именно эта аналогия позволила Г. Ому сформулировать уравнение (1a) как закон. Кроме того, понятие гидравлического сопротивления помогло В.В. Петрову, а затем Г. Ому, по аналогии с гидравлическим сопротивлением ввести в теорию величину электрического сопротивления. Значительно позже двойственная связь была установлена между сопротивлением и электрической проводимостью [4]:

$$G = \frac{1}{R}. \qquad (2)$$

На простом примере покажем, что двойственное отношение между переменными позволяет находить двойственные уравнения элементов электрической цепи. Применим отношение двойственности к выражению закона электромагнитной индукции:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad i_C = C\frac{du_C}{dt} \qquad (3)$$

В уравнениях (3) двойственность параметров емкости и индуктивности не является очевидной, поэтому попробуем показать наличие этого отношения, используя комплексные сопротивления и проводимости реактивных двухполюсников:

$$\underline{Z}_L = j\omega L, \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}. \qquad (4)$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}, \qquad \underline{Y}_C = j\omega C. \qquad (5)$$

Запишем выражения (3) в комплексной форме:

$$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L = \underline{Z}_L \cdot \dot{I}_L \;\Leftrightarrow\; \dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{U}_C = \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_C \qquad (6)$$

Сопоставим уравнения (1) и (6) в порядке записи, чтобы соответствие уравнений (3) и уравнений (1) стало очевидным. Уравнения (6) описывают электрическое равновесие на реактивных элементах электрической цепи, а уравнения (1) – на резистивных элементах. Из попарного сравнения уравнений следует, что импеданс индуктивности двойственен комплексной проводимости емкости, а, следовательно, коэффициент индуктивности L находится в такой же зависимости от величины емкости C.

Двойственность идеальных источников энергии (ЭДС, тока) следует из двойственности переменных (напряжение, ток), характеризующих эти элементы электрической цепи. В свою очередь, двойственность моделей реальных источников энергии (ЭДС, тока), представленных на рис.2, не является очевидной. Отметим, что модель реального источника постоянного напряжения была предложена в процессе реализации физических представлений специалистов. Модель же второго реального источника получена из первой благодаря понятию эквивалентной схемы. Параметры модели источника тока находятся по формулам:

$$J = \frac{E}{R},\ G = \frac{1}{R}.$$

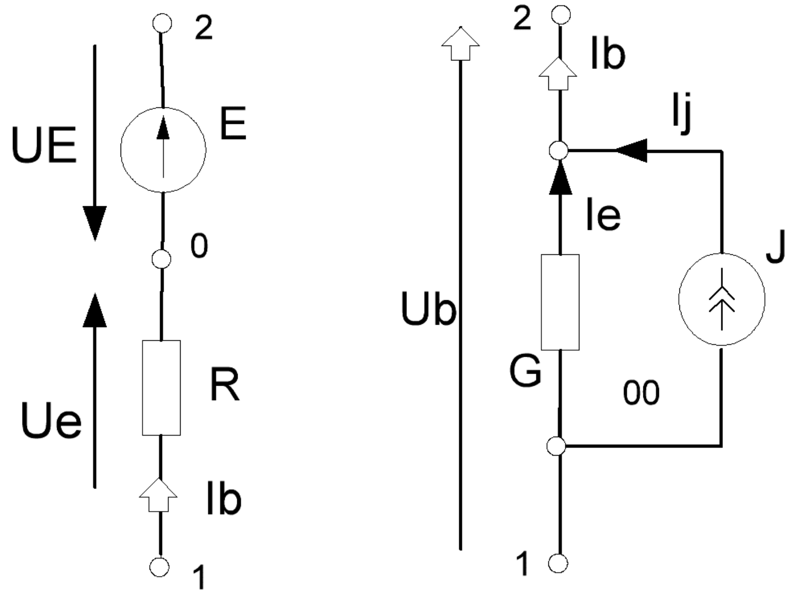

Рис. 2. Модели реальных источников напряжения и тока

Легко заметить, что схемы реальных источников отличаются структурно: устранимый узел 0 заменен на формальный контур 00. Для источника напряжения основной переменной является ток ветви, для источника тока – напряжение ветви. Первая модель описывается формулой закона Ома для ветви

$$I^b = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{R} = \frac{U^b + E}{R}, \qquad (7.1)$$

что привычно для любого специалиста в области теории цепей. Однако закон Ома для ветви имеет и двойственную формулу:

$$U^b = \frac{I^b - J}{G}. \qquad (7.2)$$

По схеме модели источника напряжения, рис.2, можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$U^e - U^b = E, \qquad (8)$$

где U^e – падение напряжения на элементе _ резисторе ветви;

U^b – напряжение ветви.

Двойственная форма выражения (8) находится легко после подстановки двойственного комплекта переменных

$$I^e - I^b = -J. \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (9) составлено по первому закону Кирхгофа.

Уравнения (8), (9) имеют одинаковую структуру и отличаются только знаком при номинале идеального источника тока. Это вызвано тем, что у идеального источника тока, в отличие от идеального источника напряжения, отсутствует дублирующее понятие ЭДС.

В теории электрических цепей схемы, приведенные на рис.2, называются дуальными. Определение дуальных схем требует, чтобы «закон изменения контурных токов в одной из них был подобен закону изменения узловых потенциалов в другой» [5]. На рис.3 приведен пример построения двойственного графа, который начинается с того, что в каждом контуре располагается узел, а затем проводятся ветви, каждая из которых пересекает один элемент контура [5]. Описанное построение гарантирует подобие уравнений узла и контура, т.е. при получении двойственного графа выполняется процедура, аналогичная той, с помощью которой получают дуальные электрические цепи.

Таким образом, одним и тем же методом в теории графов мы строим двойственный граф, а в теории электрических цепей – дуальную схему. Интересно, почему одинаковый результат преобразования мы называем по-разному. Такое «раздвоение» названий вносит ненужное разнообразие определений и способствует непониманию принципа двойственности.

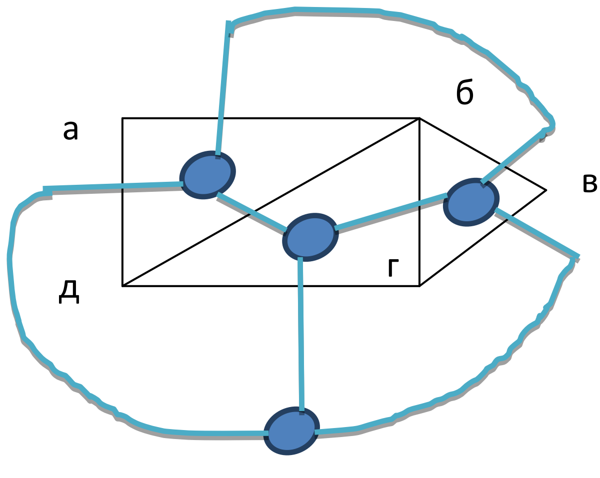

Рис. 3. Пример построения двойственного графа

С открытием законов Кирхгофа электрическую цепь стали представлять либо как связную совокупность узлов, либо как связное множество контуров [6]. Приведем формулировки законов Кирхгофа в терминах потока и потенциала.

Первый закон: «Сумма токов в каждом узле равна нулю».

$$\sum_{n=1}^{k} I_n^b = 0 \,, \tag{10}$$

где I^b – ток ветви, поток плотности тока $I^b = \delta \cdot ds$;

k – число ветвей узла.

Второй закон: «Сумма разностей потенциалов в контуре равна нулю».

$$\sum_{n=1}^{m} U_n^b = 0 \,, \tag{11}$$

где U^b – напряжение ветви, разность потенциалов узлов ветви x, y

$U^b = \varphi_x - \varphi_y$;

m – число ветвей контура.

Другими словами, потоки балансируются в узлах, а потенциалы – в контурах. По своей сути законы Кирхгофа являются физико-структурными.

Уравнение (11) может быть составлено относительно двойственных переменных:

$$\sum_{n=1}^{m} R_n I_n^b = \sum_{n=1}^{m} E_n \,. \tag{12}$$

Именно, такое уравнение равновесия контура (12) вводится в школе при изучении физики электричества, а его двойственная форма не всегда известна даже студентам ВУЗов:

$$\sum_{n=1}^{k} G_n U_n^b = -\sum_{n=1}^{k} J_n \,. \tag{13}$$

Знак минус в уравнении (10) стоит потому, что направление номинала источника тока совпадает с током, возникающим в ветви, куда этот источник включен. А источник напряжения описывается двумя величинами: генерируемым напряжением и ЭДС, стрелки которых направлены встречно.

Итак, уравнениям (12), (13) соответствуют **контура сопротивлений** и **контура проводимостей**, в которых действую соответственно источники ЭДС и источники тока. Приведем пример контура сопротивлений и двойственный ему узел проводимостей. Важно отметить, что при определении направлений токов и источников соблюдается простое правило: Направления токов и источников по отношению к двойственному узлу должны быть такими же самыми, что и их ориентация относительно положительного обхода двойственного контура. При выполнении этого условия схемы, рис.3, описываются подобными уравнениями.

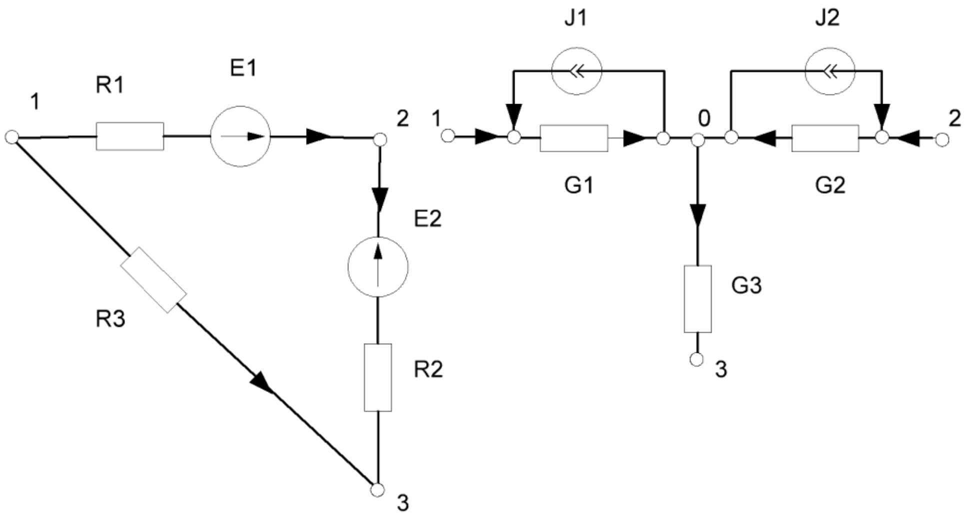

Рис.4. Контур двойственный узлу

$$-U_1^b - U_2^b + U_3^b = 0 \Leftrightarrow -I_1^b - I_2^b + I_3^b = 0$$

$$-I_1^b R_1 - I_2^b R_2 + I_3^b R_3 = -E_1 + E_2 \Leftrightarrow -U_1^b G_1 - U_2^b G_2 + U_3^b G_3 = J_1 - J_2$$

Очевидно, что контуру сопротивлений на рис.4 соответствует контур проводимостей с источниками тока, которые эквивалентны источникам ЭДС исходного контура. Математики, работающие в области комбинаторной топологии, R – контура называют «полноценными циклами», а G – контура – «коциклами дополнительной размерности» [7]. Эти понятия используются в теореме Пуанкаре о двойственности.

Теорема утверждает, что каждому полноценному циклу, который содержится в комплексе K, соответствует ровно один коцикл дополнительной размерности, но непременно содержащийся в этом же комплексе.

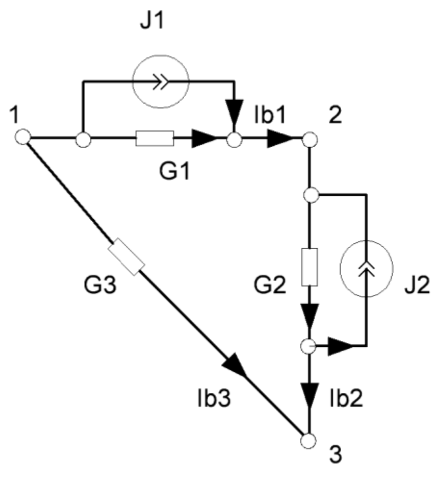

Рис. 5. Коцикл контура, представленного на рис.4

На рис.5 приведен коцикл, двойственный контуру, изображенному на рис.4. Здесь двойственное отношение реализовано без изменения структуры, но уравнение коцикла аналогично уравнению цепи, двойственной основному контуру:

$$-U_1^b G_1' - U_2^b G_2' + U_3^b G_3' = J_1 - J_2 \quad .$$

В процессе доказательства этого утверждения Пуанкаре обратился к наглядному геометрическому объекту, к многомерной сфере. На ее внутреннюю поверхность он спроектировал комплекс K, ветви которого связаны «отношением соседства», т.е. комплекс может быть описан матрицей инциденций. Сфера разделяет пространство на две части. Внутри сферы контурные токи каждого цикла образуют вихревые потоки, а напряжения коциклов (разности потенциалов) создают виртуальные обручи, в рамках которых уравновешиваются внутренние напряженности каждого из полноценных циклов [7]. Естественно, токи измеряются внутри сферы, а потенциалы узлов – вне сферы.

Электрическая цепь – это физико-структурный объект, поэтому при его изучении нельзя останавливаться на достижениях топологии (даже гениальных!). Отдавая должное этой математической дисциплине, специалисты теории цепей изучают физические процессы либо с помощью электрических токов, либо с помощью напряжений.

Так как величины напряжений ветвей двойственны величинам токов ветвей, то результаты анализа физических процессов в электрической цепи следует подвергать проверке с помощью величины, которая не имеет двойственного образа. Проверка расчетов обычно осуществляется при составлении баланса мощностей элементов электрической цепи. Предполагается, что мощность является скалярной величиной, независимой от структуры электрической цепи. Однако Г. Крон опровергнул это мнение при разработке метода расчета сложной схемы по частям. Он считал понятие мощности универсальным инвариантом, который позволял ему успешно контролировать процесс объединения решений подсхем разной структуры [8].

Обратимся к эквивалентным источникам, рис. 2, графы которых связаны двойственным отношением. Для нахождения мощности схемы с источником ЭДС произведем следующие операции:

$$P = U_{xx} \cdot I_{кз} = E \cdot \frac{E}{R} = E^2 G \quad , \qquad (14)$$

где $I_{кз}$ – ток короткого замыкания схемы,

U_{xx} – напряжение холостого хода.

Для схемы с источником тока совершенно аналогично (14) получаем выражение для мощности (или подстановкой двойственного комплекта величин):

$$P = U_{xx} \cdot I_{кз} = \frac{J}{G} \cdot J = J^2 R \quad . \qquad (15)$$

Сравнивая выражения (14), (15), отмечаем, что они содержат по одной переменной каждой схемы рис. 2, которые связаны отношением двойственности. Формально схемы рис.2 разные, но их мощности в количественном отношении равны, т.к. схемы эквивалентны.

Баланс мощностей в электрической цепи всегда рассматривался как выражение закона сохранения энергии, но Г. Крон внес новый, структурный аспект в определение этой величины при разделении большой схемы на отдельные подсхемы. Новый математический аппарат не давал возможности игнорировать структуру каждой из подсхем, а также структуру графа соединений отдельных частей в большую схему. Поэтому в процессе расчета мощность используется как величина, объединяющая ток одной подсхемы с напряжением другой.

Запишем баланс мощностей электрической цепи в матричной форме:

$$\left[\bar{I}^b\right]^t \left[\bar{U}^b\right] = 0 \, , \qquad (16)$$

где $\bar{I}^b$ – вектор-столбец токов ветвей электрической цепи;

$\bar{U}^b$ – вектор-столбец напряжений ветвей электрической цепи.

На первый взгляд, уравнение (16) никак не связано со схемой соединений элементов в цепь. Однако каждый из сомножителей можно определить по уравнениям:

$$\left[\bar{I}^b\right]^t = \left[\bar{I}^k\right]^t B \quad , \qquad \left[\bar{U}^b\right] = A^t \, \bar{\varphi} \quad . \qquad (17)$$

где $\bar{I}^k$ – вектор столбец контурных токов;

$\bar{\varphi}$ – вектор-столбец узловых потенциалов;

A – матрица узловых инциденций;

B – матрица контурных инциденций.

Уравнения (17) содержат матрицы инциденций, а, следовательно, связь баланса мощностей (16) со структурой электрической цепи очевидна.

Известно, что обычно при определении знаков элементов матриц узловых и контурных инциденций используют разные правила (для узла и для контура). Чтобы знаки элементов матриц были согласованы, следует использовать только одно правило знака (в узле). Матрицы, полученные таким образом, называются фундаментальными. Напомним основные этапы получения фундаментальной контурной матрицы по фундаментальной матрице узловых инциденций. Выбираем конкретное дерево схемы, составляем матрицу главных сечений, перестраиваем матрицу с целью выделения единичного блока и получаем фундаментальную матрицу узловых инциденций:

$$\left[A_f\right] = \begin{bmatrix} 1 & F \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Преобразуя блока F матрицы (18), получаем блок K матрицы контурных инциденций:

$$K = -F^t.$$

Остается только записать фундаментальную матрицу контурных инциденций:

$$\left[B_f\right] = \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где F, K – блоки соответствующих матриц;

1 – единичный блок матриц (18), (19).

После подстановки выражений (18), (19) в уравнения (17), а затем в уравнение (16) получаем:

$$\left[\bar{I}^k\right]^t \left[B_f\right]\left[A_f\right]^t \bar{\varphi} = 0. \qquad (20)$$

Произведение центральных сомножителей уравнения (20) равно нулю и представляет собой абстрактную форму записи теоремы Зеляха-Теллегена:

$$\left[B_f\right]\left[A_f\right]^t = 0. \qquad (21)$$

Теорема доказывает, что выражение (16) справедливо даже тогда, когда токи и напряжения измерены на одной схеме, но в разные моменты времени или на двух схемах одной структуры, но при разных параметрах элементов. Особо отметим, что контурная матрица инциденций соответствует **схеме сопротивлений**, а узловая матрица инциденций – **схеме проводимостей**, а также, что в уравнении (20) переменные двойственных электрических цепей участвуют как равноправные. Баланс мощностей действительно не зависит от параметрических изменений в схеме, а, следовательно, величина мощности является настоящим инвариантом.

Еще раз отметим, что в уравнение (20) вектор контурных токов $\bar{I}^k$ и вектор потенциалов $\bar{\varphi}$ входят как равноправные переменные. После умножения на соответствующие матрицы инциденций элементы вектора токов $\bar{I}^b$ и вектора напряжений $\bar{U}^b$ вычисляются совершенно одинаково или как разность контурных токов, или как разность потенциалов узлов. Вероятно, следует изменить отношение к понятию контурного тока, который вошел в теорию как условная расчетная величина.

Любой ток, протекая по контуру, создает магнитное поле, вектор напряженности которого перпендикулярен этому току и проходит через поверхность охваченную контуром. Если ток контура переменный (функция времени), то возникает переменное магнитное поле, силовые линии которого выходят за пределы сферы Пуанкаре, во внешнюю среду, т.е. это магнитное поле может вызвать электрический ток в замкнутом контуре вне пределов сферы. Другими словами, часть энергии электрической цепи может быть передана во внешнюю среду, что противоречит постулатам теории электрических цепей.

Главный постулат теории электрических цепей можно выразить следующим образом: – Ток течет только по тем путям, которые отмечены на графе (изображении) схемы. Однажды он уже был нарушен, когда было разрешено с помощью коэффициента взаимной индукции учитывать влияние между индуктивностями, охваченными общим магнитным полем. Эта связь не обозначается на графе (изображении) схемы, она является как бы невидимой.

Профессор Величко Ю.Т. , рассматривая математическую модель многополюсника, предложил ввести «невидимую» сторону многополюсного элемента с «невидимым» узлом t. Через эти «невидимые» элементы (узел, сторона) часть энергии электрической цепи уходит в эфир. Предложенное теоретическое усложнение модели позволило ввести параметры «невидимых» элементов в систему уравнений[11]:

$$\begin{bmatrix} P_t \\ I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{kt} & I_{t1} & I_{t2} & \dots & I_{tn} \\ I_{k1} & Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ I_{k2} & Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{kn} & Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где P_t – мощность невидимой стороны, [Вт];

I_n – токи узлов, [А], и напряжения узлов U_n , [В], многополюсника относительно общей точки;

I_{kn} – токи короткого замыкания узлов, [А];

I_{tn} – частичный ток невидимой стороны от n–го элемента, [А].

Таким образом, постулат теории электрических цепей был формально восстановлен [11]. Конечно, можно оспаривать необходимость лишней строчки и столбца в матрице уравнения (17), но следует признать, что общий ход мысли вполне соответствует теореме Пуанкаре. Переменное магнитное поле контуров схемы внутри сферы может навести ЭДС в любых контурах, в том числе в контурах внешней среды. «Невидимая» сторона многополюсника располагается во внешней среде.

Итак, в статье показано, что отношение двойственности было введено в теорию электрических цепей тогда, когда стали измерять не только величину силы тока, но и разность потенциалов. Первой парой двойственных физических величин были ток и напряжение, т.е. величины, связанные законом Ома. В полном соответствии с физической целесообразностью мы рассматриваем эти величины как переменные, представляющие один и тот же процесс электрической активности. Возникает вопрос: - Зачем нужно дублировать переменные?

Рассматривая двойственность как фундаментальное понятие, Гегель считал, что это имеет смысл:

«Мы, таким образом, удваиваем явление, ломая его надвое: на внутреннее и внешнее, на силу и проявление, на причину и следствие» [12].

Принцип двойственности позволяет рассматривать изучаемый объект теории электрических цепей с двух ракурсов, что дает возможность проверки процесса расчета электрической цепи или преобразования математической модели схемы.

Наличие двойственности можно использовать как дополнительный признак при сравнении электрических цепей. Например, если цепи обладают двойственной структурой и двойственными наборами величин, то они представляют собой эквивалентные схемы. Но если структуры тождественны, а наборы физических величин связаны отношением двойственности, то мы имеем дело с подобными электрическими схемами. Баланс мощностей, как первых, так и вторых электрических цепей равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков В.В. Двойственность. – www.bogdinst.ru/works/int.htm/
2. Шнейберг Я.А. Василий Владимирович Петров 1761 – 1834. – М.: Наука, 1985. – 224с.
3. Ohm G.S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. – Berlin: T.H. Riemann, 1827j. – 245s.
4. Feldtkeller R. Einführung in die Vierpoltheory der elektrischen Nachrichtentechnik. – Leipzig: S.Hirzl Verlag, 1948. – 148s.
5. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: Учебное пособие. 7-е изд., стер. – СПб: Изд. «Лань», 2009. – 592с.
6. Kirchhoff G. Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige.// Ann. Phys., Bd. 64, 1845, s. 497 – 514.
7. Попков В., Батурин А. Философское переосмысление топологического комплекса Пуанкаре. – Цикл лекций по двойственности для «продвинутых» студентов (ссылка в объявлении) – www.bogdinst.ru/
8. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). – М.: Наука, 1972. – 544с.
9. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 334с.
10. Tellegen B.D.H. A general network theorem, with applications // Philips Res. Rept.,1952, vol.7, august. – p. 259 – 269.
11. Величко Ю.Т. Анализ напряжений, токов и мощностей в линейном многополюснике, Изв. ВУЗов СССР – Радиоэлектроника, 1968. 12, №18.
12. Труфанов С.Н. «Наука логики» Гегеля. – Самара: «Парус», - 1999. – 192с.