

О методе Лагранжа и его применении к анализу автопоздных систем

ПОПКОВ В.В.

Батюшков высказал глубокую мысль о связи энергии и прошлого труда, который он рассматривал как одну из форм фиксации энергии, находящейся в распоряжении человечества, - "... в виде силы, известной в механике под названием силы связей, которую мы условились для удобства называть силой направляющей, в отличие от «двигательной силы» [3, цит. по 22].

Батюшков, Николай Дмитриевич (родился в 1855 году), автор исследования: "Связь экономических явлений с законами энергии" (СПб., 1889), где доказывается, что главное внимание следует обращать не на распределение, а на развитие производства и увеличение производительности труда, так как только тогда возможно значительное повышение заработной платы и притом наряду с ростом и доли капиталиста.

В этом русле первоначально в механике развивался мощный математический аппарат. Теоретики думали об одном: как уйти от второго закона Ньютона с его неудобной силовой компонентой, как распространить принцип чисто инерционного (то есть равномерного и прямолинейного) движения на случаи, когда это движение стеснено разного рода ограничениями. Было понятно, что тело в этом случае скользит вдоль ограничений по «наипрямейшей» траектории, например, двигаясь по гладкой искривленной поверхности, тело выбирает в качестве траектории т.н. «геодезическую» линию, - именно она минимально искривлена. Математики искали и находили все новые и новые аналоги прямой линии в разного рода «кривых» геометриях. Силовая компонента то и дело прорывалась сквозь ряды математиков, когда физикам удавалось вскрыть природу каких-то новых сил, перейти на новый *структурный уровень* картины мироздания. Но теоретики более или менее быстро находили этим силам геометрические эквиваленты (так, гравитационные силы превращались в кривизну пространства-времени, и т.д. и т.п.), и тогда вновь начинал работать математический аппарат теории, а силовая компонента вновь вытеснялась по ту сторону ограничений, по ту сторону геометрии. Стремление восстановить симметрию инерционного и силового начал, тем не менее, оставалось. Позиции силового начала были отчасти восстановлены в механике Лагранжа, который обобщил второй закон Ньютона, рассмотрев, как он действует в механической *системе*, в системе взаимосвязанных тел. Выяснилось, что силы, вытесненные «по ту сторону ограничений», образуют там особое пространство, дополнительное и ортогональное к пространству движущихся тел.

Уравнения равновесия и движения на тела, движения которых не свободны, но подчинены известным ограничениям. Для этой цели Лагранж придумывает свой знаменитый метод неопределенных множителей. Он умножает вариации всех уравнений, которым должно удовлетворять движущееся тело, на неопределенные множители, прибавляет просто полученные произведения к своим уравнениям в качестве членов и затем трактует эти уравнения, как если бы они представляли собою уравнения движения совершенно свободного тела.

МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА [Lagrange multipliers] — дополнительные множители, преобразующие *целевую функцию* экстремальной задачи выпуклого программирования (в частности, *линейного программирования*) при ее решении одним из классических методов — методом **разрешающих множителей (методом Лагранжа)**. Полученная функция носит название *лагранжиан*, или **функция Лагранжа**. М. Л. (обычно обозначаемые греческой буквой λ) помогают проверить *оптимальность* найденного *допустимого решения* и, если оно неоптимально, найти направление, в котором нужно производить изменение решения. Их особенно важное свойство заключается в том, что они помогают выяснить, в какой степени оптимальное значение *целевой функции* чувствительно к изменениям *констант ограничений*.

Широко используются М. Л. в *линейном программировании*, причем последнее из указанных свойств можно назвать ключом к применению линейного программирования в экономических задачах *распределения ресурсов* (здесь их называют *оптимальными или объективно обусловленными оценками*, или *теневыми ценами* соответствующих видов *затрат*).

Известно, что в экономике идея введения «множителей Лагранжа» привела к созданию теории двойственности математического программирования. Множители Лагранжа в этой теории относятся к *ограничениям*, это некие параметры ограничений, - оценки ограниченных ресурсов. В зависимости от цен, «назначенным» ограниченным ресурсам, они сделают убыточными все те производства, которые не вошли в оптимальную производственную программу, полученную в результате решения исходной задачи математического программирования.

ОБЪЕКТИВНО ОБУСЛОВЛЕННЫЕ (ОПТИМАЛЬНЫЕ) ОЦЕНКИ (О. О. ОЦЕНКИ) [objectively determined valuations] — одно из основных понятий *линейного программирования*, введенное Л. В. Канторовичем. Это *оценки продуктов, ресурсов, работ*, выступающих в качестве ограничений в условиях решаемой *оптимизационной задачи*. Их называют также *двойственными оценками, разрешающими множителями, множителями Лагранжа* и целым рядом других терминов. Будучи элементами *двойственной задачи* линейного программирования, они показывают, насколько изменится значение *критерия оптимальности* в соответствующей *прямой задаче* при приращении данного ресурса на единицу (т. е. имеют предельный характер). Оценки выступают, следовательно, как мера *дефицитности* ресурсов и продукции, как мера влияния *ограничений на функционал*; их можно использовать далее как инструмент определения *эффективности* отдельных *технологических способов* с позиций общего *оптимума* и, наконец, как инструмент балансирования суммарных *затрат и результатов*.

Так как О. о. оценки показывают, насколько возрастает (или уменьшается) функционал (критерий оптимальности) экономико-математической задачи линейного программирования при увеличении (или уменьшении) запаса соответствующего вида ресурса на единицу и при использовании ее наилучшим образом, то они могут показать, к каким экономическим последствиям приведет производство **дополнительной единицы ресурса**.

Если производство единицы ресурса, оцененного таким образом, увеличит функционал меньше, чем на эту величину, то такой ресурс не надо производить, т. е. не надо включать в *план*. В противном случае этот ресурс целесообразно

включать в план, поскольку общий результат увеличится. О. о. оценки являются также показателями *взаимозаменяемости ресурсов* относительно заданного критерия, т. е. характеризуют эффективность замены малого количества (единицы) одного ресурса другим в рамках решения экономико-математической задачи. Таким образом, система О. о. оценок может характеризовать экономическую структуру плана, роль отдельных факторов в формировании оптимума.

О. о. оценки применяются в оптимизационных расчетах: при решении задач размещения производства, наиболее рационального прикрепления поставщиков к потребителям, оптимального раскрытия материалов и др. В перспективном планировании эти оценки могут использоваться в качестве ориентировочных цен, характеризующих будущие соотношения ресурсов и потребностей общества. (Эта их роль хорошо отражена в термине, принятом в западной литературе, — **“теневые цены”**.) При этом учитываются следующие закономерности. С течением времени О. о. оценки имеют тенденцию к снижению. При развитии народного хозяйства по *оптимальной траектории* оптимальная оценка стремится к т. н. **нормальной оценке**, которая складывается из **прямых затрат и затрат обратной связи**, возникающих вследствие ограниченности **капитальных вложений**. Эти закономерности объясняются тем, что на долговременном отрезке развития дефицитность воспроизводимых ресурсов будет выравниваться в результате соответствующего распределения капитальных вложений. Оптимальные оценки, таким образом, определяются всей совокупностью условий общественного производства и потребления, учитываемых при составлении плана (прогноза).

На основе О. о. оценок были выработаны многообразные методы **экономико-математического анализа** хозяйственных процессов. Ставился вопрос об их использовании и в ценообразовании (подробнее см. *Оптимальное ценообразование*).